

参数激励电磁轴承—转子系统的混沌特性^{*}

张海燕, 段元民

(首都医科大学生物医学工程学院, 北京 100054)

摘要: 研究了参数激励下电磁轴承—转子系统的非线性动力学问题, 得出了主参数共振情况下的平均方程, 得到了平均系统的 Normal Form。对平均方程进行数值模拟, 结果表明电磁轴承—转子系统在某些参数区域内可以出现全局分叉和混沌运动。

关键词: 电磁轴承—转子系统; 全局分叉; 混沌动力学

中图分类号: TB1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) S2-0127-03

电磁轴承因具备非接触、无摩擦、低功耗和高转速等特点, 因此具有传统轴承和支承技术所无法比拟的优越性。由于电磁控制力实际上是受控对象的位移和控制电流的非线性函数, 从而构成了非线性机电系统。因此, 非常有必要对电磁轴承—转子系统的非线性动力学特性进行深入的研究^[1,2], 以为电磁轴承—转子系统的控制提供理论指导。Ji 等^[3]在忽略重力影响的前提下, 利用一个具有三次非线性项的二自由度模型研究了大间隙电磁轴承—转子系统的非线性动力学, 研究了主共振和内共振两种情况下的电磁轴承—转子系统的非线性响应, 利用多尺度方法得到了在水平和垂直方向反映振动模态幅值和相位的平均方程。本文就是在这一模型基础上研究了参数激励下电磁轴承—转子系统的全局分叉和混沌动力学。

1 电磁轴承—转子系统的动力学模型

电磁轴承—转子系统简化模型如图 1 所示。认为转子是具有两个自由度的质点。根据牛顿第二定律, 写出转子的运动方程如下

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x - \alpha + me\Omega^2 \sin \Omega t, \\ m\ddot{y} &= F_y - cy + me\Omega^2 \cos \Omega t + mg \end{aligned} \quad (1)$$

其中, m , e , c , Ω 分别是质量, 偏心距, 阻尼系数和转子的速度, F_x , F_y 分别是 x 轴和 y 轴方向的电磁力的合力。

2 两自由度系统的动力学方程及变刚度控制分析

本研究的定子有 8 个极对, 即 4 个磁芯对, 根

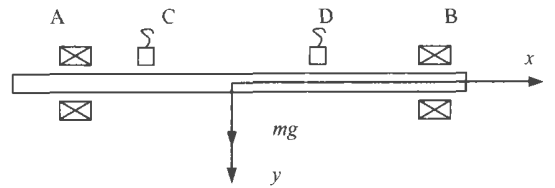


图 1 主动式电磁轴承 A, B 支承的刚性转子的模型, C, D 为传感器

Fig. 1

据电磁轴承电磁力的表达式, 有

$$F_i(I_i, w_i) = a \left[\frac{(I_0 + I_i)^2}{(C_0 + w_i)} - \frac{(I_0 - I_i)^2}{(C_0 - w_i)} \right], \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2)$$

从非线性动力学分析^[4]中可以知道, 变刚度系统相对于定常刚度系统来说, 在参数空间中稳定区域比较大, 并且前者的稳定性要好于后者。因此研究具有变刚度特性的电磁轴承—转子系统的非线性动力学具有重要的理论意义和实际应用价值。

令控制器的比例系数为 $k_1 = k_0 + k \cos(\omega t)$, 由 (1) 式和 (2) 式, 并应用多尺度方法 (MMS) 对系统进行分析, 得到极坐标形式的平均方程如下

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dT_1} &= -\frac{1}{2} \mu a_1 + \frac{1}{2} f_1 a_1 \sin 2\varphi_1 + \\ &\quad \frac{1}{8} \alpha_2 a_1 a_2^2 \sin 2(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

$$a_1 \frac{d\varphi_1}{dT_1} = \frac{1}{2} \sigma_1 a_1 + \frac{1}{2} f_1 a_1 \cos 2\varphi_1 +$$

$$\frac{3}{8} \alpha_1 a_1^3 + \frac{1}{4} \alpha_2 a_1 a_2^2 + \frac{1}{8} \alpha_2 a_1 a_2^2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2),$$

^{*} 收稿日期: 2003-06-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目

作者简介: 张海燕 (1977 年生), 女, 助教; E-mail: catharine7791@163.com

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dT_1} = & -\frac{1}{2}\mu a_2 + \frac{1}{2}f_2 a_2 \sin 2\varphi_2 + \\ & \frac{1}{8}\beta_1 a_2 a_1^2 \sin 2(\varphi_1 - \varphi_2), \\ a_2 \frac{d\varphi_2}{dT_1} = & \frac{1}{2}\sigma_2 a_2 + \frac{1}{2}f_2 a_2 \cos 2\varphi_2 + \\ & \frac{1}{8}\beta_1 a_2 a_1^2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{3\beta_2}{8}a_2^3 + \frac{\beta_2}{4}a_2 a_1^2 \quad (3) \end{aligned}$$

从(3)式可知, 当 $\frac{da_1}{dT_1} = \frac{d\varphi_1}{dT_1} = \frac{da_2}{dT_1} = \frac{d\varphi_2}{dT_1} = 0$ 时, 可以得到系统的周期解并进行局部分叉分析。

3 平均方程的规范形

为了得到平均方程的规范形, 分析全局分叉, 将方程(3)转化成如下直角坐标形式

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dT_1} = & -\frac{1}{2}\mu x_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - f_1)x_2 - \\ & \frac{3}{2}\alpha_1 x_2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}\alpha_2 x_2(x_3^2 + 3x_4^2) - \alpha_2 x_1 x_3 x_4, \\ \frac{dx_2}{dT_1} = & \frac{1}{2}(\sigma_1 + f_1)x_1 - \frac{1}{2}\mu x_2 + \\ & \frac{3}{2}\alpha_1 x_1(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}\alpha_2 x_1(3x_3^2 + x_4^2) + \alpha_2 x_2 x_3 x_4, \\ \frac{dx_3}{dT_1} = & -\frac{1}{2}\mu x_3 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - f_2)x_4 - \\ & \frac{3}{2}\beta_1 x_4(x_3^2 + x_4^2) - \frac{1}{2}\beta_2 x_4(x_1^2 + 3x_2^2) - \beta_2 x_1 x_2 x_3, \\ \frac{dx_4}{dT_1} = & \frac{1}{2}(\sigma_2 + f_2)x_3 - \frac{1}{2}\mu x_4 + \\ & \frac{3\beta_1}{2}x_3(x_3^2 + x_4^2) + \frac{1}{2}\beta_2 x_3(3x_1^2 + x_2^2) + \beta_2 x_1 x_2 x_4 \quad (4) \end{aligned}$$

当 $\mu=0$, $\Delta_1=0$ 且 $\Delta_2=\sigma_2^2-f_2^2>0$ 时, 系统(4)有非半单双零特征值和一对纯虚特征值

$$\lambda_{1,2} = 0 \text{ 和 } \lambda_{3,4} = \pm i\omega \quad (5)$$

这里 $\omega^2 = \sigma_2^2 - f_2^2$ 。将激励幅值 f_2 看作一个参数, 并且令 $\sigma_1 = -f_1 + 2\bar{\sigma}_1$ 且 $f_1=1$, 于是不带参数的平均方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dT_1} = & x_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 x_2(x_1^2 + x_2^2) - \\ & \frac{1}{2}\alpha_2 x_2(x_3^2 + x_4^2) - \alpha_2 x_1 x_3 x_4, \\ \frac{dx_2}{dT_1} = & \frac{3}{2}\alpha_1 x_1(x_1^2 + x_2^2) + \\ & \frac{1}{2}\alpha_2 x_1(3x_3^2 + x_4^2) + \alpha_2 x_2 x_3 x_4, \\ \frac{dx_3}{dT_1} = & -\frac{1}{2}\sigma_2 x_4 - \frac{3}{2}\beta_1 x_4(x_3^2 + x_4^2) - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\beta_2 x_4(x_1^2 + 3x_2^2) - \beta_2 x_1 x_2 x_3,$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_4}{dT_1} = & \frac{1}{2}\sigma_2 x_3 + \frac{3\beta_2}{2}x_3(x_3^2 + x_4^2) + \\ & \frac{1}{2}\beta_2 x_3(3x_1^2 + x_2^2) + \beta_2 x_1 x_2 x_4 \quad (6) \end{aligned}$$

借助于 Maple 程序^[5], 得到带扰动项的规范形为

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{\partial H}{\partial u_2} + \epsilon g^{u_1} = u_2, \\ u_2 = & -\frac{\partial H}{\partial u_1} + \epsilon g^{u_2} = \\ & -\mu_1 u_1 + \alpha_1 u_1^3 + \alpha_2 u_1 I^2 - \epsilon \mu_2 u_2, \\ I = & \frac{\partial H}{\partial \gamma} + \epsilon g^I = -\epsilon I + \epsilon f_2 I \sin 2\gamma, \\ I\gamma = & -\frac{\partial H}{\partial I} + \epsilon g^\gamma = \\ & \bar{\sigma}_2 I + \beta_1 I^3 + \beta_2 u_1^2 I + \epsilon f_2 I \cos 2\gamma \quad (7) \end{aligned}$$

这里 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned} H(u_1, u_2, I, \gamma) = & \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}\mu_1 u_1^2 - \\ & \frac{1}{4}\alpha_1 u_1^4 - \frac{1}{2}\alpha_2 I^2 u_1^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 I^2 - \frac{1}{4}\beta_1 I^4 \quad (8) \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} g^{u_1} = & 0, g^{u_2} = -\mu_2 u_2, \\ g^I = & -\mu I + \bar{q}_2 I \sin 2\gamma, g^\gamma = \bar{q}_2 I \cos 2\gamma \end{aligned}$$

当分析系统的奇点、稳定性和计算 Melnikov 函数时, 带扰动的规范形实际上要比方程的标准形式更为简单。因此利用规范论来简化方程得到方程的标准形式, 分析简化方程的动力学要更为容易和方便。

4 混沌运动的数值模拟

利用全局摄动方法对解耦系统和扰动系统的动力学进行分析, 发现当平均方程有非半单双零特征值和一对纯特征值时, 发现参数激励电磁轴承—转子系统能够经历 Hopf 分叉、异宿分叉和 Silnikov 型鞍焦点同宿分叉, 这意味着在整个四维系统中存在着混沌运动。为了与解析结果进行比较, 并验证理论分析的正确性, 下面利用数值分析方法来预测参数激励电磁轴承—转子系统的混沌运动, 利用 Matlab 计算软件对常微分方程进行分析。考虑平均方程(4), 利用四五阶 Runge-Kutta 方法^[6], 对该微分方程组进行数值计算, 使用系统的相图, 波形图两种方法识别系统的混沌动力学行为^[7]。

通过数值计算, 我们得到系统取不同参数和不同初值时的相位图和波形图。

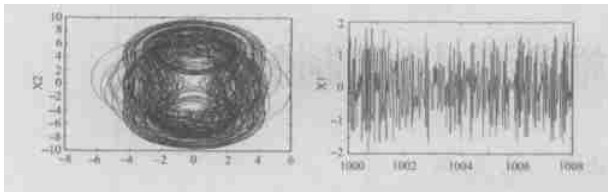


图2 $x_{10}=-4.01, x_{20}=0.6, x_{30}=-1.011, x_{40}=1.2,$
 $f_1=488.9, f_2=1169.63, \mu=0.6$
 $\sigma_1=6.35, \sigma_2=2, \alpha_1=4.1778, \beta_1=7.3308$
 $\alpha_2=4.6083, \beta_2=77.3308$

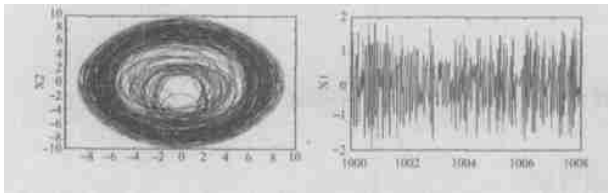


图3 $x_{10}=0.4, x_{20}=0.8, x_{30}=1.011, x_{40}=1.4,$
 $f_1=100, f_2=20, \mu=0.16,$
 $\sigma_1=3.25, \sigma_2=6.55, \alpha_1=10.3941, \beta_1=2.6083,$
 $\alpha_2=2.9367, \beta_2=5.9367$

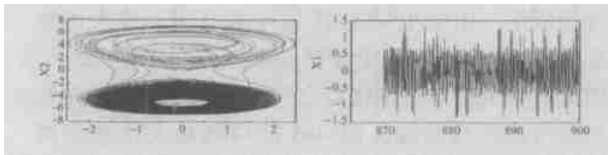


图4 $x_{10}=1.01, x_{20}=0.08, x_{30}=-1.01, x_{40}=1.04,$
 $f_1=488, f_2=116.9, \mu=0.6$
 $\sigma_1=4, \sigma_2=2, \alpha_1=9.05, \beta_1=-2.093673,$
 $\alpha_2=4.6083, \beta_2=-5.97$

数值结果表明，电磁轴承—转子系统在某些参数域内可以出现混沌运动。系统混沌运动的相轨线表明，电磁轴承—转子系统的运动具有初值敏感性，相轨线随初值的微小变化而产生巨大的变化，电磁轴承—转子系统混沌运动的相轨线的形状随激励幅值的变化发生较大的差异，系统混沌运动具有局部不稳定和整体稳定的特征。

5 结 论

本文利用解析方法研究了参数激励下电磁轴承—转子系统的全局分叉和混沌动力学，写出了参数激励下电磁轴承—转子系统的平均方程，利用Maple程序得到了电磁轴承—转子系统的规范形。为了验证理论分析的正确性，使用系统的相图和波形图两种数值方法识别系统的混沌动力学行为。数值结果表明在某些参数域内，电磁轴承—转子系统可以出现混沌运动，混沌运动具有初值敏感性。电磁轴承—转子系统是一个非常复杂的非线性机电耦合系统，对这类系统的非线性动力学特性，还有许多问题有待于研究，例如系统参数的选取、非线性控制，分叉和混沌控制等，还有待做进一步的深入研究。

参考文献:

[1] NA U J, PALAZZOLO A. Optimized realization of fault-tolerant heteropolar magnetic bearings[J] . J Vibration and Acoustics, 2000, 122: 209—221.

[2] VIRGIN L N, WALSH T F, KNIGHT J D. Nonlinear behavior of a magnetic bearing system[J] . Transaction of the ASME, 1999, 117: 582—588.

[3] JI J C, HANSEN C H. Nonlinear oscillations of a rotor in active magnetic bearings[J] . J Sound and Vibration, 2001, 240: 599—612.

[4] 陈予恕,唐云. 非线性动力学中的现代分析方法[M] . 北京: 科学出版社, 1992.

[5] YU P, ZHANG W, BI Q. Vibration analysis on a thin plate with the aid of computation of normal forms[J] . International J Non-linear Mechanics, 2000.

[6] 普雷斯 W H, 弗拉内里 B P. 数值方法大全[M] . 兰州: 兰州大学出版社, 1992.

[7] KOVACIC G, WIGGINGS S. Orbits homoclinic to resonance with an application to chaos in a model of the forced and damped sine-Gordon equation[D] . 1992, 57: 185—225.

The Global Bifurcation and Chaotic Dynamic of the Rotor-AMBs System

ZHANG Hai-yan, DUAN Yuan-min
(Capital University of Medical Sciences, Beijing 100054)

Abstract: There are abundant and complicated dynamical behaviors in the rotor-AMBs system. In this paper, the global bifurcations and chaotic dynamics are investigated when the rotor-AMBs system has the time-varying stiffness. The numerical simulations verify the analytical predictions.

Key words: rotor-AMBs system; global bifurcations; chaotic dynamics